

Chapitre 1

Analyse dimensionnelle et incertitudes

1 Analyse dimensionnelle

Dans l'enseignement supérieur scientifique, les calculs sont établis sous *forme littérale* : on désigne les quantités physiques, c'est-à-dire les *grandeurs physiques*, par un symbole et non plus directement par leur valeur numérique. Ceci permet d'analyser et de comprendre la relation liant plusieurs grandeurs physiques entre elles d'une part et de supprimer les erreurs d'arrondis successifs d'autre part.

L'analyse dimensionnelle, introduite par Reynolds vers 1883, présente plusieurs avantages :

- vérifier qu'un résultat n'est pas absurde du point de vue dimensionnel
- intuitiver ou retrouver (au moins partiellement) une loi physique, si on connaît les grandeurs en jeu
- obtenir des ordres de grandeurs

1.1 Grandeur physique et dimension

On appelle *grandeur physique* une quantité qui se rapporte à une propriété et qui peut se mesurer. Une grandeur physique possède une *dimension* qui correspond à sa nature (longueur, énergie, température...). Sa mesure consiste à comparer la grandeur d'intérêt à une grandeur étalon ayant la même dimension. Il existe des propriétés non quantifiables par manque d'étalon. Par exemple, on peut mesurer la hauteur du tableau *La Joconde* de Léonard de Vinci en la comparant à un mètre mais on ne peut pas mesurer sa beauté. La beauté est non quantifiable, ce n'est donc pas une grandeur physique.

La mesure d'une grandeur physique consiste donc à quantifier une propriété en lui associant une grandeur mathématique, la mesure, et une unité qui dépend de l'étalon utilisé. Une grandeur physique peut être scalaire (une masse), vectorielle (une vitesse) ou même matricielle.

Historiquement, certaines grandeurs physiques sont rapidement apparues comme plus fondamentales que les autres : la longueur, la masse, le temps... Les physiciens ont donc défini des grandeurs fondamentales à partir desquelles découlent toutes les autres. On en compte classiquement sept et on les nomme les *grandeurs de base* :

Grandeur	Symbole
Temps	T
Longueur	L
Masse	M
Courant électrique	I
Température	θ
Quantité de matière	N
Intensité lumineuse	J

Les autres grandeurs physiques ont des dimensions qui se déduisent de ces sept dimensions de base. On parle de *grandeurs dérivées*.

Certaines grandeurs sont sans dimensions. C'est le cas des *angles* par exemple, qui peuvent être compris comme le quotient de deux longueurs. On parle de grandeur *adimensionnée* et on écrit : $[G]=1$.

En réalité, il a été montré par Michael Duff en 2003 qu'on peut se ramener à une unique dimension de base, la masse, pour en déduire toutes les autres. Toutefois, on s'en tiendra aux sept dimensions de base dans ce cours.

1.2 Équation aux dimensions

L'*équation aux dimensions* est l'équation qui relie la dimension d'une grandeur dérivée notée $[G]$ aux sept grandeurs de base. Sa forme générale est :

$$[G] = L^{\alpha_1} M^{\alpha_2} T^{\alpha_3} \theta^{\alpha_4} I^{\alpha_5} N^{\alpha_6} J^{\alpha_7}$$

où les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ sont les exposants des sept dimensions de base. Ils peuvent être positifs, nuls ou négatifs. Pour une grandeur *adimensionnée*, ils sont tous nuls.

Voici quelques exemples d'équations aux dimensions :

- Si G est un temps, sa dimension s'écrit : $[G]=T$
- Si G est une vitesse, sa dimension s'écrit : $[G]=\frac{L}{T}=L \cdot T^{-1}$, c'est une dimension dérivée.
- Si G est une accélération, sa dimension s'écrit : $[G]=\frac{L}{T^2}=L \cdot T^{-2}$, c'est aussi une dimension dérivée.

1.3 Homogénéité

1.3.1 Homogénéité dimensionnelle

On ne peut comparer des grandeurs physiques que si elles ont la même dimension ; on dit qu'elles sont *homogènes*. Ainsi, une équation n'a de sens que si les deux membres sont homogènes. Par exemple : $G_1 = G_2 + G_3$ **nécessite** que $[G_1] = [G_2] = [G_3]$.

1.3.1.1 Validité d'une équation

Vérifier l'homogénéité dimensionnelle d'une équation est très utile pour vérifier qu'on n'a pas écrit d'absurdité. Un exemple avec un pendule simple :

Supposons que l'on calcule la période propre de balancement du pendule pour de petits angles et que l'on trouve : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$

où T_0 est la période propre, l la longueur du pendule et g l'accélération terrestre. Il faut alors chercher à vérifier que cette formule est homogène.

La dimension du membre de gauche est un temps : $[T_0] = T$.

La dimension du membre de droite maintenant. Le facteur numérique 2π est sans dimension : $[2\pi] = 1$. La grandeur l est une longueur donc $[l] = L$ et g est une accélération donc $[g] = L \cdot T^{-2}$.

Ainsi la dimension du quotient est $\left[\frac{g}{l}\right] = \frac{L \cdot T^{-2}}{L} = T^{-2}$ et sa racine carrée aura pour dimension $\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = T^{-1}$.

Les deux membres ne sont pas homogènes, un temps ne peut pas être égal à l'inverse d'un temps. La formule est donc **fausse** et on sait qu'on a commis une erreur dans notre calcul. La bonne expression était : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

L'analyse dimensionnelle est donc un outil de réfutation, pas de validation :

Si l'homogénéité dimensionnelle **est vérifiée**, l'équation est juste dimensionnellement (mais n'inclut pas les facteurs numériques) (mais peut-être fausse par ailleurs). Si l'homogénéité dimensionnelle **n'est pas vérifiée**, l'équation est nécessairement **fausse**.

1.3.1.2 Ordre de grandeur

L'analyse dimensionnelle peut aussi être utilisée pour approcher l'ordre de grandeur d'un résultat. Revenons à l'exemple du pendule simple et cherchons l'ordre de grandeur de sa période propre T_0 .

On suppose que la physique du pendule est gouvernée par trois grandeurs : sa longueur l , sa masse m et l'accélération terrestre g . On se sert de l'équation aux dimensions :

$$[T_0] = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma \Leftrightarrow T = L^\alpha M^\beta (L \cdot T^{-2})^\gamma \Leftrightarrow T = L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma}$$

Pour obtenir l'homogénéité de l'équation, on doit donc résoudre le système suivant :

On reporte ces valeurs dans l'équation aux dimensions :

et on en déduit l'égalité suivante :

où k est une constante sans dimension. On retrouve bien la formule correcte donnée précédemment au facteur numérique $k=2\pi$ près, qui pourra être déterminé par l'expérience ou retrouvé par un calcul théorique.

Retrouver un ordre de grandeur à partir de l'analyse dimensionnelle demande de l'expérience afin d'identifier les grandeurs physiques pertinentes du problème qu'on considère. Il est important de se rappeler qu'elle ne donne pas accès aux facteurs numériques.

Un cas célèbre d'application d'analyse dimensionnelle pour approcher un ordre de grandeur est celui du physicien britannique Geoffrey Taylor. A la sortie de la Seconde Guerre Mondiale, il a pu estimer la puissance de la première bombe nucléaire testée par les Etats-Unis, une information classée secret-défense, à partir d'un film de l'explosion rendu public par les américains.

1.3.2 Homogénéité tensorielle

La nature mathématique (scalaire, vecteur...) des grandeurs physiques doit être la même dans les deux membres de l'équation. On peut ainsi écrire une égalité scalaire : $a+b=c$, ou vectorielle : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$.

En revanche, il n'est pas possible d'avoir des natures différentes pour les deux membres. Ainsi les équations : $\vec{u}=a$ ou encore $\vec{v}+b=\vec{w}$ n'ont aucun sens.

1.4 Unités

Mesurer revient à comparer la grandeur physique d'intérêt avec une grandeur étalon de même dimension. Chaque grandeur physique a une dimension **unique** mais le choix des unités est *a priori* à la discrétion de l'utilisateur. Par exemple, une longueur peut être exprimée en mètres, en centimètres, en kilomètres, en pouces, en angströms, en milles nautiques, en années-lumière etc... Néanmoins, dans un souci d'universalité, les physiciens ont développé un référentiel commun d'unités appelé **système international d'unités** (abrégié SI). Il est tenu à jour par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) qui est situé à Paris. Les sept dimensions de base sont donc associées à sept *unités de base* :

Grandeur	Symbole	Unité SI	Symbole
Temps	T	seconde	s
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Courant électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

Le 20 mai 2019, toutes les unités du SI ont été redéfinies à partir de sept constantes naturelles qui lui confère une grande stabilité. Toutes les autres unités sont issues de ces sept unités de bases et donc liées aux sept constantes fondamentales ; on parle d'*unités dérivées*. Un exemple d'unité dérivée est l'unité SI d'une force, le Newton, qui peut s'exprimer à l'aide des unités de base : $1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Il existe des unités pour les grandeurs adimensionnées que sont les angles et les angles solides. Les premiers sont exprimés en radian (symbole *rad*) et les derniers en stéradian (symbole *sr*).

À l'exception des facteurs qui sont sans unité, un résultat de mesure **doit** être présenté avec une unité sinon il ne veut rien dire ! De plus, on l'écrit sous forme scientifique avec un nombre de chiffres significatifs donné multiplié par une puissance de 10. Par exemple, une longueur *l* de 204 mètres s'écrira : $l = 2,04 \times 10^2 \text{ m}$.

Par commodité, on a donné des noms aux puissances de 10 :

Valeur	10^{-24}	10^{-21}	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfixe	yocto	zepto	atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci
Symbole	y	z	a	f	p	n	μ	m	c	d

Valeur	10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}
Préfixe		déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa	zetta	yotta
Symbole		da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y

- $v = \sqrt{\frac{g}{h}}$ où g est l'accélération terrestre et h une hauteur
- $\lambda = v f$ où λ est une longueur d'onde, v une vitesse et f une fréquence
- $\frac{T^3}{a^2} = 4\pi^2 GM$ (3ème loi de Kepler) où T est une période, a un rayon et G la constante de gravitation de Newton.

Exercice 2 : Vibration d'une goutte d'eau

On cherche à déterminer la fréquence f de vibration d'une goutte d'eau par analyse dimensionnelle. On suppose que les paramètres dominants sont le rayon de la goutte R , sa masse volumique ρ et une constante A liée à la tension superficielle dont la dimension est celle d'une force par unité de longueur. On écrit donc :

$$f = k R^a \rho^b A^c$$

avec k une constante sans dimension. En déduire les valeurs des exposants a, b et c .

Exercice 3 : Equation des gaz parfaits

L'équation des gaz parfaits est la suivante : $PV = nRT$

où P est la pression du gaz, V son volume, n sa quantité de matière, T sa température et R la constante des gaz parfaits.

1. Donner les dimensions et les unités des variables P, V, n, T .
2. En déduire la dimension et l'unité de la constante des gaz parfaits R .

Exercice 4 : Coefficients d'une vitesse

On exprime la vitesse d'un corps par l'équation $v = At^3 - Bt$ où t représente le temps. Déterminer les dimensions et les unités des coefficients A et B .

2 Incertitudes

Il n'y a pas de mesure parfaite : une mesure est toujours entachée d'une erreur.

Pour une série de mesures multiples (exemple, des élèves qui effectuent la mesure de la longueur d'une table), on obtient ensemble de valeurs différentes les unes des autres. Il faut alors choisir le résultat qu'on estime être le meilleur et estimer la dispersion des valeurs de mesure obtenues.

Dans le cas d'une mesure unique aussi une erreur est commise : il s'agit alors d'estimer cette erreur afin de conserver un œil critique sur l'obtention du résultat issu de la mesure.

2.1 Rappels

Supposons que cinq binômes d'étudiants d'une classe réalisent chacun **une** mesure de la longueur d'une table avec un mètre. Voici les résultats qu'ils obtiennent :

Binôme	Binôme 1	Binôme 2	Binôme 3	Binôme 4	Binôme 5
Mesure	1,96 m	2,04 m	1,98 m	2,02 m	2,00 m

On introduit alors des indicateurs de position (moyenne) et de dispersion (variance, écart-type) afin de caractériser l'ensemble des résultats obtenus à l'issue des mesures.

2.1.1 Valeur moyenne

Quand on a n résultats de mesure notés x_i d'une même grandeur, la **moyenne** est retenue comme meilleure estimation de la valeur de la grandeur mesurée :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Si le nombre de répétitions n tend vers l'infini, la valeur moyenne tend vers l'espérance mathématique.

Dans notre cas, la valeur moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{1}{5} (1,96 + 2,04 + 1,98 + 2,02 + 2) = 2,00 \text{ m}$$

2.1.2 Variance et écart-type

Pour estimer la dispersion de n mesures, on calcule la moyenne du carré de l'écart à la moyenne afin d'obtenir la **variance** :

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

On définit alors **l'écart-type** :

$$s(x) = \sqrt{s^2(x)}$$

qui a la même dimension que la grandeur mesurée. Plus les résultats sont dispersés, plus les termes $(x_i - \bar{x})^2$ sont grands et plus la variance et l'écart-type sont grands. L'écart-type d'un échantillon de population est un indicateur de la dispersion des mesures autour de la moyenne de cet échantillon.

En réalité, les quantités $s^2(x)$ et $s(x)$ sont des *estimateurs* de la variance et de l'écart-type car le nombre de mesures qu'on réalise est **fini**.

Dans notre cas, la variance vaut :

$$v(x) = s^2(x) = \frac{1}{4} [(1,92 - 2)^2 + (2,04 - 2)^2 + (1,98 - 2)^2 + \dots] = 0,001$$

et l'écart-type :

$$s(x) = \sqrt{s^2(x)} = \sqrt{0,001} = 0,03 \text{ m}$$

2.2 Loi de propagation des incertitudes

On mesure rarement la grandeur physique qui nous intéresse. Par exemple, pour la surface d'un rectangle, on doit mesurer une longueur et une largeur puis faire un calcul. Si on connaît les incertitudes sur la longueur et la largeur, quelle sera l'incertitude sur la surface ?

Supposons que la grandeur qui nous intéresse, appelée y et notée *grandeur de sortie*, dépende de deux *grandeurs d'entrée* x_1 et x_2 . Les incertitudes respectives de x_1 et x_2 sont notées $u(x_1)$ et $u(x_2)$ (u pour *uncertainty*). La relation entre y , x_1 et x_2 s'exprime mathématiquement à l'aide d'une fonction : $y = f(x_1, x_2)$. Dans le cas général où les grandeurs d'entrée sont indépendantes et les incertitudes sont petites devant les valeurs des grandeurs, l'incertitude composée notée $u(y)$ est donnée par :

$$u^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 u^2(x_2)$$

Ce résultat est généralisable à N grandeurs d'entrées indépendantes. On a alors :

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

2.3 Exemples d'application

2.3.1 Produit simple

Considérons la loi d'Ohm où la résistance R peut être obtenue à partir de la mesure de la tension U et de l'intensité I : $R = \frac{U}{I}$. On a donc une grandeur de sortie R qui dépend de deux grandeurs d'entrée U et I , dont les incertitudes sont notées $u(U)$ et $u(I)$ respectivement. On applique la loi de propagation des incertitudes :

et on obtient finalement l'incertitude de R :

On pourra présenter le résultat sous la forme : $R = \bar{R} \pm u(R)$.

2.3.2 Produit avec puissance

On calcule la puissance de l'effet Joule en régime continu qui est donnée par $P = RI^2$. On cherche l'incertitude sur la puissance notée $u(P)$ sachant qu'on connaît les incertitudes sur la résistance $u(R)$ et sur l'intensité $u(I)$. On applique la loi de propagation des incertitudes :

$P = RI^2$

incertitude relative :

$$\frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2 \frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

et on obtient finalement l'incertitude pour P :

$$u(P) = P \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2 \frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

On pourra présenter le résultat sous la forme : $P = \bar{P} \pm u(P)$.

2.3.3 Somme

On calcule une distance par la différence entre deux longueurs mesurées : $D = L_1 - L_2$. On cherche l'incertitude sur la distance notée $u(D)$ sachant qu'on connaît les incertitudes sur les deux longueurs $u(L_1)$ et $u(L_2)$. On applique la loi de propagation des incertitudes :

incertitude absolue :

$$u(D) = \sqrt{u^2(L_1) + u^2(L_2)}$$

et on obtient finalement l'incertitude pour D :

On pourra présenter le résultat sous la forme : $D = \bar{D} \pm u(D)$.

2.4 Incertitudes et chiffres significatifs

Dans une valeur numérique, le premier chiffre non nul de gauche désigne le chiffre le plus significatif et le dernier chiffre de droite le chiffre le moins significatif. Les nombres 3140, 3,140 et 0,003140 ont ainsi tous quatre chiffres significatifs. Le nombre de chiffres significatifs rend compte de la précision d'un résultat et permet donc de se faire une idée de l'incertitude.

Ecrire un résultat sous la forme $X = (5,31622 \pm 0,04) \text{ m}$ n'a aucun sens car l'incertitude indique que nous n'avons pas d'information au-delà de la deuxième décimale. Il faut donc arrondir le résultat au centième. On écrira plutôt $X = (5,32 \pm 0,04) \text{ m}$.